УДК 629.735.083.06

Аль-Аммори Али, Аль-Аммори Хасан
Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина
Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1

Методика оценки оптимальных объемов статистических испытаний байесовским методом

Al-Ammouri Ali, Al-Ammouri Hasan
National Transport University, Kyiv, Ukraine
Ukraine, 01010, c. Kyiv, Suvorova st., 1

Technics for Evaluation of the Optimum Size of Statistical Tests by Bayesian Methods

Аль-Амморі Алі, Аль-Амморі Хасан
Національний транспортний університет, м. Київ, Україна
Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1

Методика оцінки оптимальних обсягів статистичних випробувань байєсовським методом

Одним из основных требований к испытаниям исследуемой аппаратуры, повышающим их эффективность, является уменьшение числа испытаний при заданной достоверности статистической информации. На основе байесовского метода, позволяющего учесть априорные данные статистических исследований, составлен алгоритм оценок результатов статистических испытаний, обеспечивающий заданную достоверность с меньшим числом испытаний.
Ключевые слова: достоверность информации, оптимизация, эффективность.

One of the major test requirements for study of equipment that increases their efficiency is to reduce the number of tests at a given accuracy of statistical information. Based on the Bayesian method, which takes into account a priori data of statistical studies, the algorithm for estimates of the results for statistical tests has been made. This algorithm provides the required accuracy with less number of tests.
Key words: reliability of information, optimization, efficiency.

Одним з основних вимог до випробувань досліджуваної апаратури, що підвищує їх ефективність, є зменшення числа випробувань при заданій достовірності статистичної інформації. На основі байєсівського методу, що дозволяє врахувати апріорні дані статистичних досліджень, складено алгоритм оцінок результатів статистичних випробувань, що забезпечує задану достовірність з меншим числом випробувань.
Ключові слова: вірогідність інформації, оптимізація, ефективність.

Введение

При испытаниях аппаратуры возникает задача достоверной оценки её параметров, достигаемой с минимальным числом испытаний. Байесовские методы, применяемые в статистике, основаны на учете априорной информации, вследствие этого позволяют существенно сократить число статистических испытаний при заданных требованиях на достоверность статистических оценок.

На основе сопряженных распределений вероятностей можно составить алгоритмы, которые снижают трудоемкость вычислений и позволяют сравнительно простым способом оценить основные характеристики аппаратуры по данным статистических испытаний.

Для определения оптимального числа испытаний в качестве основного критерия оценок исследуемых параметров применяется байесовский риск, который при квадратичной функции потерь, учитывающей возможность отклонения случайных значений исследуемого параметра от его среднего значения, определяет суммарную дисперсию исследуемой, случайной величины, включаемую как дисперсию самого математического ожидания относительно его истинного среднего значения, так и дисперсию случайной величины относительно математического ожидания, а также изменения дисперсии, зависимые от числа испытаний. При этом важно учесть также корреляционную связь случайных величин математического ожидания и меры точности исследуемого распределения вероятностей, определяемой величиной, обратной дисперсии распределения.

В процессе минимизации байесовского риска можно получить оптимальные объемы требуемых испытаний на двух этапах проведения таких испытаний, и взаимосвязь этих величин можно оценить с учетом влияния ряда факторов, оказывающих воздействие на объемы испытаний на первом и втором этапах их проведения.

Основная часть

Согласно теореме Байеса [1], [2] условная функция плотности вероятностей (ФПВ) $P(\theta / x)$ для вектора параметров θ, который включает математическое ожидание и дисперсию, считающиеся также случайными величинами при условии получения вектора X случайных наблюдений, может быть выражена следующей зависимостью:

$$P(\theta / x) = \frac{P(\theta) \cdot P(X / \theta)}{\int\limits_{R\theta} P(\theta) \cdot P(x / \theta) d\theta},$$

где $P(\theta)$ и $P(X / \theta)$ – соответственно ФПВ распределения вектора параметров и условная ФПВ распределения вектора x наблюдаемых значений при заданном значении вектора θ параметров, которая называется функцией правдоподобия.

Считается, что $P(x / \theta)$ есть априорное условное распределение вероятностей, а $P(\theta / x)$ – апостериорное условное распределение.

Планирование и анализ эксперимента на основании теоремы Байеса существенно упрощается при введении сопряженного стандартного семейства распределений вероятностей вектора θ параметров, обладающего следующим свойством [2], [3].

Если априорное распределение θ принадлежит этому семейству, то при любом объеме выборки n и любых значениях наблюдений в выборке апостериорное распределение вектора θ параметров должно также принадлежать этому семейству.

Таким образом, сопряженное семейство распределений предполагает особую связь, которая должна существовать между семейством распределений вероятностей параметров и семейством распределений вероятностей наблюдений.

На основании изложенного в работах [2], [3] предлагается ряд способов оценки параметров в зависимости от вида распределений вероятностей при получении повторных выборок наблюдаемых значений.

Рассмотрим одномерное нормальное распределение случайной величины при неизвестных параметрах: математическом ожидании и дисперсии. С целью упрощения математических преобразований удобнее в качестве меры рассеивания случайной величины вместо дисперсии σ^2 нормального распределения рассматривать меру точности

τ нормального закона, определяемую как величину, обратную дисперсии $\tau = 1/\sigma^2$. Полагая, что $x_1,\ldots,x_n$ – повторная выборка из нормального распределения с неизвестными значениями среднего M и меры точности R, а априорное совместное распределение M и R определяются в виде:

Условное распределение M при $R = r(r > 0)$ – нормальное со средним μ и мерой точности τ, причем $-\infty < \mu < \infty, \tau > 0$; маргинальное распределение R есть гамма-распределение с параметрами α и β, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, которое определяется выражением для вероятностной плотности:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot r^{(\alpha-1)} \cdot e^{-\beta r} & \text{при} \quad r > 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

где математическое ожидание $E(r)$ случайной величины r и соответственно дисперсия $D(r)$ равны:

$$E(r) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad D(r) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

согласно [2], [3] апостериорное совместное распределение M и R при $x = x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ определяется следующим образом:

– условное распределение M при $R = r$ есть нормальное со средним μ' и мерой точности $\tau' = (\tau + n)r$, где

$$\mu' = \frac{\tau\mu + n\bar{x}}{\tau + n},$$

– маргинальное распределение R есть гамма-распределение с параметрами

$$\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}$$

$$\beta' = \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \frac{\tau n\left(\bar{x} - \mu\right)^2}{2(\tau + n)} \qquad (1)$$

Полученное сопряженное семейство распределений вероятностей обладает рядом важных особенностей:

1 – априорное маргинальное распределение M есть распределение Стьюдента с 2α степенями свободы, параметром сдвига μ и мерой точности $\dfrac{\alpha\tau}{\beta}$;

2 – апостериорное маргинальное распределение Стьюдента получается заменой μ, τ, α и β их апостериорными значениями, причем:

– число степеней свободы $2\alpha + n$ апостериорного маргинального распределения M не зависит от наблюдаемых значении;

– параметр сдвига μ и точность τ зависят от наблюдаемых значений,

3 – параметры M и R всегда зависимы;

4 – если значение меры точности R распределения вероятностей велико, то наблюдение дает очень точную информацию о значении среднего M, если же значение R мало, то одно наблюдение дает мало информации о значении M.

При условии, что исследуемые параметры системы имеют нормальное распределение, можно на основании приведенных выше соотношений составить алгоритм последовательных оценок средних значений $E(M), E(R)$, а также дисперсий $D(M), D(R)$, математического ожидания M и меры точности R.

В качестве априорных исходных данных $E(M), E(R), D(M)$ и $D(R)$ можно взять приближенные значения, которые с увеличением числа последовательных наблюдений не будут оказывать влияние на конечные результаты оценок. Вычислительные процедуры алгоритма можно представить по шагам.

Шаг 1. По исходным данным $E(R)$ и $D(R)$ необходимо определить параметры гамма-распределения согласно выражениям:

$$\alpha = \frac{\{E(R)\}^2}{D(R)}, \ \beta = \frac{E(R)}{D(R)}. \tag{2}$$

Шаг 2. Поскольку случайная величина M имеет распределение Стьюдента со 2α степенями свободы и мерой точности $\frac{\alpha \cdot \tau}{2}$, то из выражений (2) и соотношения [2]: $D(M) = \beta \cdot \tau^{-1} \cdot (\alpha - 1)^{-1}$ следует

$$\tau = \frac{E(R)}{\left[\{E(R)\}^2 - D(R)\right] D(M)}, \tag{3}$$

$$\mu = E(M). \tag{4}$$

Шаг 3. По данному нормальному распределению производится повторная выборка из n наблюдений и определяются:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad ns = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2.$$

Шаг 4. Определяются параметры μ', τ', α' и β' апостериорных распределений M и R согласно следующим выражениям:

$$\mu' = (\tau\mu + n\overline{x})(\tau + n)^{-1}, \tau' = \tau + n$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \ \beta' = \beta + \frac{1}{2} ns \tag{5}$$

Шаг 5. Определяются апостериорные значения математических ожиданий и дисперсий оцениваемых параметров M и R:

$$E'(M) = \mu' \quad D'(M) = \frac{\beta'}{\tau'(\alpha' - 1)}, \tag{6}$$

$$E'(R) = \frac{\alpha'}{\beta'} \qquad D'(R) = \frac{\alpha'}{(\beta')^2}. \tag{7}$$

Теперь можно произвести анализ полученных результатов, например, способом интервальных оценок.

Интервальная оценка среднего значения $E(M)$ может быть определена по таблицам распределения Стьюдента при следующих исходных данных:

– число степеней свободы равно $k = 2\alpha$;

– параметр сдвига равен μ;

– мера точности определяется выражением $\frac{\alpha \cdot \tau}{\beta}$.

В качестве значений α, β, μ и τ для интервальной оценки M берутся последние расчетные данные, полученные согласно описываемому алгоритму.

Задаваясь, например, доверительной вероятностью v, можно по таблицам распределения Стьюдента и полученным исходным данным определить доверительный интервал (N_1, N_2), в котором находится полученное среднее значение M согласно выражению:

$$P_r\left[-t_1 \le \left(\frac{\alpha\tau}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(M-\mu) \le t_1\right] = v \cdot \qquad (8)$$

Условие (8) можно записать следующим образом:

$$P_r\left[N_1 \le M \le N_2\right] = v, \qquad (9)$$

где

$$N_1 = \mu - t_1\left(\frac{\beta}{\alpha\tau}\right)^{\frac{1}{2}},\ N_2 = \mu + t_1\left(\frac{\beta}{\alpha\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

причем $t_1\left(\frac{\beta}{\alpha\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$ – квантиль, t – распределения Стьюдента.

Выражение (9) означает, что для данного интервала, выбранного из совокупности интервалов, вероятность содержать среднее значение M равна v.

Из анализа равенств (10) следует, что с увеличением числа выборок величина доверительного интервала уменьшается. Если задаться требуемым значением доверительного интервала (N_1, N_2), полученного при заданной доверительной вероятности v, то можно повторно производить байесовские оценки параметров согласно изложенному алгоритму по опытным данным до тех пор, пока, например, не будет получено заданное значение доверительного интервала при заданной доверительной вероятности.

Разумеется, можно применять и другие способы оценивания значений параметров, полученных согласно данному алгоритму. Важно только, чтобы было введено определенное решающее правило, по которому можно было бы установить: продолжать ли последовательные статистические оценки параметров по данному алгоритму или же их больше не производить.

Таким образом, если полученные статистические значения параметров и их интервальные оценки являются сомнительными, то процедуры статистических оценок по данному алгоритму следует повторять. Для этого производится еще n наблюдений из данного нормального распределения и повторяются шаги 2 – 5 описываемого алгоритма, но вместо исходных априорных значений параметров $E(M), D(M), E(R), D(R), \mu, \tau, \alpha$ и β необходимо применять апостериорные значения $E'(M), D'(M), E'(R), D'(R), \mu', \tau', \alpha'$ и β', полученные согласно выражениям (5) и (6).

Анализ математических зависимостей позволяет сделать следующие выводы: исходные априорные данные по $E(M), D(M), E(R), D(R)$ не влияют на окончательные значения оценок; данные измерений, последовательно используемые при оценках, соответственно снижают дисперсии $D(M)$ и $D(R)$ математического ожидания M и меры точности R; среднее значение $E(R)$ меры точности зависит от выборочной дисперсии S каждой серии измерений; доверительные интервалы оценок среднего значения, $E(M)$, полученные при доверительной вероятности $v = 0{,}95$, существенно уменьшаются с увеличением числа серий измерений Z.

Таким образом, предложенный алгоритм оценки параметров позволяет производить последовательные байесовские статистические оценки таких параметров, как математическое ожидание и дисперсия при нормальном законе распределения вероятностей. Такой способ позволяет существенно сократить необходимое число испытаний и контроля аппаратуры. Предложенным алгоритмом можно пользоваться и при двухмерном или трех-

мерном нормальном законе распределений вероятностей, когда наблюдаемые статистические данные не коррелированны. Если исследуемые статистические данные коррелированны, то можно предварительно произвести их декоррелирование способом поворота системы координат [4].

Как уже указывалось, задача заключается в том, чтобы с помощью статистических испытаний байесовским методом оценить векторный параметр, включающий в качестве компонент неизвестные значения математического ожидания и дисперсии исследуемого нормального распределения. При этом совместное распределение случайных величин математического ожидания и дисперсии есть нормальное гамма-распределение.

При оценке векторного параметра принимается матричная квадратичная функция потерь вида [2]:

$$П(\vec{\theta},\vec{a}) = (\vec{\theta}-\vec{a})' A(\vec{\theta}-\vec{a}),$$

где A – симметрическая неотрицательно определенная матрица.

В качестве критерия оптимальности принимается минимум байесовского среднего риска. Оптимальная по этому критерию оценка вектора $\vec{\theta}$ есть вектор средних значений маргинальных апостериорных распределений математического ожидания и меры точности. Байесовский риск при заданном априорном распределении после проведенных n испытаний равен матрице, определяемой произведением матрицы A на ковариационную матрицу [2] $W(m,r/x)$:

$$\rho(n_1,n_2) = tr\{AW(m,r/x)\},$$

где $W(m,r/x) = \begin{vmatrix} D(m/x) & K(m,r/x) \\ K(m,r/x) & D(r/x) \end{vmatrix}$, $D(m/x), D(r/x)$ – дисперсии математического ожидания m и меры точности r соответственно; $K(m,r/x)$ – ковариация этих же параметров для апостериорного условного распределения.

Элементы матрицы $W(m,r/x)$ представляют средние значения дисперсий и ковариаций параметров m и r. Полагая, что элементы матрицы A равны 1 и учитывая при этом, что потери, связанные с увеличением объемов испытаний n_i, возрастают пропорционально коэффициентам c_i, можно получить следующее выражение для общего байесовского риска:

$$\rho(n_1,n_2) = D(m/x) + D(r/X) + 2K(m,r/X) + c_1 n_1 + c_2 n_2. \qquad (11)$$

С увеличением объемов испытаний n_1 и n_2 дисперсии, входящие в формулу (11), имеющие априорные большие значения, будут уменьшаться, а потери, обусловленные c_i, будут возрастать. Таким образом, скалярная функция $\rho(n_1,n_2)$ имеет минимум, и оптимальные объемы испытаний n_1, n_2 определяются минимально возможным значением риска (11). Расчеты показывают, что последним слагаемым в выражении (1) можно пренебречь. Тогда на основании алгоритма, после несложных преобразований получим простые рекуррентные зависимости для параметров τ_k, α_k, β и μ_k после k серий испытаний с объемами выборок n_i:

$$\tau_k = \tau + \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad \alpha_k = \alpha + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i, \quad \beta_k = \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i s_i, \qquad (12)$$

$$\mu_k = \left(\tau\mu + \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i\right)\left(\tau + \sum_{i=1}^{k} n_i\right)^{-1}. \qquad (13)$$

На основании (6) и (12) легко получить рекуррентные выражения для дисперсий $D_2(m)$ и $D_2(r)$ после 2-х серий испытаний с объемами выборок n_i и n_2:

$$D_2(m / X) = (2\beta + n_1 s_1 + n_2 s_2)\left[\tau(2\alpha - 2) + N(\tau + 2\alpha - 2) + N^2\right]^{-1}, \qquad (14)$$

$$D_2(r / x) = 2(2\alpha + N)(2\beta + n_1 s_1 + n_2 s_2)^{-2}, \qquad (15)$$

где $N = n_1 + n_2$, а параметры α, β и τ определяются выражениями (2). Таким образом, выражения (14) и (15) позволят достаточно точно оценить условные апостериорные дисперсии математического ожидания m и меры точности r исследуемого нормального распределения случай величин X после проведенных испытаний.

Как уже указывалось, условная апостериорная плотность вероятностей неизвестных значений математического ожидания m и меры точности r нормального распределения определяется законом нормального гамма распределения:

$$f(m, r / x) = \beta^{2}\tau^{\frac{1}{2}} r^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} \Gamma(\alpha)^{-1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left[\frac{\tau(m-\mu)^2}{2} + \beta\right] r\right\}, \qquad (16)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Для заданного закона распределения вероятностей (16) корреляционный момент $K(m, r / x)$ определяется известной зависимостью:

$$K(m, r / x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} (m - \mu)\left(r - \frac{\alpha}{\beta}\right) f(m, r / x)\, dm dr. \qquad (17)$$

Интеграл (16) легко раскладывается на 4 интеграла:

$$K(m, r / x) = I_1 - I_2 - I_3 + I_4, \qquad (18)$$

где
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} mrf(m, r / x)\, dm dr \qquad I_2 = \frac{\alpha}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} mf(m, r / x)\, dm dr$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} mrf(m, r / x)\, dm dr \qquad I_4 = \mu\frac{\alpha}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(m, r / x)\, dm dr.$$

На основании (16) интеграл I_1 можно записать следующим образом:

$$I_1 = L\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} mr^{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} e^{-Ar}\, dm dr,$$

где
$$A = \frac{\tau(m-\mu)^2}{2} + \beta \quad L = \beta^{\alpha}\tau^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha)^{-1} \qquad (19)$$

Интеграл I_1 является табличным [5] и его можно представить таким образом:

$$I_1 = L\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) A^{-\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)} m dm, \qquad (20)$$

подставляя (19) в (20) и производя необходимые преобразования, нетрудно получить:

$$I_1 = L_1\int_{0}^{\infty}\left[m^2 - 2m\mu + m^2 + 2\frac{\beta}{\tau}\right]^{-\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)} m dm, \qquad (21)$$

где
$$L_1 = 2L \cdot \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{\tau}\right)^{\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}. \qquad (22)$$

Интеграл (21) – табличный [5] и может быть записан в виде:

$$I_1 = L_1 \cdot B(2;2\alpha+1) \cdot {}_2F_1\left[1;\alpha+\frac{1}{2};\alpha+2;1-\mu^2\left(\mu^2+2\frac{\beta}{\tau}\right)^{-1}\right], \qquad (23)$$

где $B(2;2\alpha+1)$ – бета-функция, определяемая выражением:

$$B(2;2\alpha+1) = \Gamma(2)\cdot\Gamma(2\alpha+1)|\Gamma(2\alpha+3) \qquad (24)$$

${}_2F_1\left[1;\alpha+\frac{1}{2};\alpha+2;1-\mu^2\left(\mu^2+2\frac{\beta}{\tau}\right)^{-1}\right]$ – гипергеометрическая функция, которую согласно [6] можно для данных условий выразить через гамма-функции:

$${}_2F_1\left[1;\alpha+\frac{1}{2};\alpha+2;1-\mu^2\left(\mu^2+2\frac{\beta}{\tau}\right)^{-1}\right] = \Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}. \qquad (25)$$

Если подставить (22), (24), (25) в (26) и произвести несложные преобразования, то можно получить окончательное выражение для интеграла I_1:

$$I_1 = 8L\cdot(\alpha+1)\cdot\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\left[(2\alpha+2)(2\alpha+1)\tau\,\beta^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\mu^2\frac{\tau}{2\beta}+1\right)^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1}. \qquad (26)$$

Интегралы I_2, I_3 и I_4 можно найти аналогичным образом. Окончательные их значения выражаются следующими соотношениями:

$$I_2 = 2L\frac{\alpha}{\beta}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{\mu\tau}{2\beta}+1\right)^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\beta^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\alpha\tau\right]^{-1}$$

$$I_3 = \frac{\mu\alpha}{\beta} I_4 = I_3. \qquad (27)$$

Подставляя зависимости (27) в (18) и производя несложные преобразования, получим выражение для искомого корреляционного момента:

$$K(m, r/x) = -\mu\left(\frac{\tau}{\pi\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left[\beta\Gamma(\alpha)\left(\frac{\mu^2\tau}{2\beta}+1\right)^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1}. \qquad (28)$$

Отрицательный знак корреляционного момента $K(m, r/x)$ объясняется тем, что с повышением меры точности r рассеивание случайной величины m должно уменьшаться, а при малой мере точности r разброс параметров m должен быть большим.

Если подставить значения параметров τ_k, α_k, β и μ_k, определяемых выражениями (12), в (28), то можно определить апостериорное условное значение корреляционного момента $K(m, r/x)$ в зависимости от числа проведенных испытаний.

Полученное выражение (28) определяет корреляционную связь случайных значений математического ожидания и меры точности для нормального распределения статистических данных, которая должна учитываться при анализе и оценках статистических испытаний аппаратуры, что позволяет повысить их эффективность.

Если подставить значения величин $D(m/x), D(r/x), K(m,r/x)$ определяемых формулами (14), (15) и (28) с учетом (12) соответственно в выражение (11), то можно найти зависимость функции условного апостериорного риска $\rho(n_1, n_2)$ от объемов испытаний n_1 и n_2 при заданных исходных значениях параметров μ, τ, α и β, определяемых формулами (2), а также значений выборочных дисперсий S_1 и S_2, определяемых зависимостями:

$$S_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \bar{x}_1\right)^2, \; S_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_i - \bar{x}_2\right)^2.$$

В этой сложной зависимости можно наблюдать следующие закономерности:

1. При больших априорных значениях $D(m)$ и $D(r)$ и малых C_i минимум риска соответствует большим объемам выборок n_1 и n_2.

2. При больших C_i и малых априорных значениях $D(m)$ и $D(r)$ оптимальные величины n_1 и n_2 будут небольшими.

3. Соотношение между оптимальными значениями n_1 и n_2 существенно зависит от соотношений между выборочными дисперсиями S_1 и S_2 и коэффициентами потерь C_i, C_2.

Для определения оптимальных значений n_1 и n_2 применение классического метода приводит к сложным уравнениям больших степеней, решение которых возможно только численными методами. Это существенно усложняет анализ зависимостей оптимальных значений n_i от исходных данных. В данном случае определение оптимальных значений представляется целесообразным осуществить градиентным методом, сущность которого сводится к следующему:

1. Выбирается начальная точка M_0 на поверхности функций $\rho(n_1, n_2)$, соответствующая начальным значениям объемов выборок n_1^0, n_2^0.

2. Определяются приращения аргументов:

$$\Delta n_1 = -a\frac{\partial\rho(n_1, n_2)}{\partial n_1} \quad \Delta n_2 = -a\frac{\partial\rho(n_1, n_2)}{\partial n_2},$$

где a – коэффициент пропорциональности.

3. Определяются координаты новой точки M_1:

$$n_1^{p+1} = n_1^p + \Delta n_1 \qquad n_2^{p+1} = n_2^p + \Delta n_2,$$

где p – номер шага итерации.

4. Определяются условия окончания поиска:

$$\varepsilon = \left|\frac{\partial\rho(n_1, n_2)}{\partial n_1} + \frac{\partial\rho(n_1, n_2)}{\partial n_2}\right|.$$

Например, если $\varepsilon \geq 0{,}1$, то $a = 10$, если $0{,}01 \leq \varepsilon \leq 0{,}1$, то $a = 1$, если же $\varepsilon < 0{,}01$, то поиск закончен.

5. Проверяется достаточное условие существования минимума

$$\frac{\partial^2\rho(n_1, n_2)}{\partial n_1^2} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2\rho(n_1, n_2)}{\partial n_2^2} \geq 0.$$

Расчеты показывают, что корреляционный момент $K(m, r/x)$ при $n_i \geq 1$ очень мал и его можно не учитывать, частные производные определяются при этом следующими зависимостями:

$$\frac{\partial\rho(n_1, n_2)}{\partial n_1} = \frac{S_1 F_1 - F_2 A}{F_1^2} + \frac{2F_2 - 2S_1 B}{F_2^3},$$

$$\frac{\partial\rho(n_1, n_2)}{\partial n_2} = \frac{S_2 F_1 - F_2 A}{F_1^2} + \frac{2F_2 - 2S_2 B}{F_2^3},$$

где $A = \tau + 2\alpha - 2 + 2N$

$B = 4\alpha + 2N$

$F_1 = \tau(2\alpha - 2) + N(\tau + 2\alpha - 2) + N^2$

$F_2 = 2\beta + S_1 n_1 + S_2 n_2$

$N = n_1 + n_2$.

Вторые частные производные соответственно определяются соотношениями:

$$\frac{\partial^2\rho(n_1, n_2)}{\partial^2 n_1} = 2\frac{F_1 F_2 - A S_1 F_1 + A^2 F_2}{F_1^3} - 2\frac{4S_1 F_2 - 3S_1^2 B}{F_2^4},$$

$$\frac{\partial^2\rho(n_1, n_2)}{\partial^2 n_2} = 2\frac{F_1 F_2 - A S_2 F_1 + A^2 F_2}{F_1^3} - 2\frac{4S_2 F_2 - 3S_2 B}{F_2^4}.$$

Таким образом, оптимальные значения объемов выборок n_1^* и n_2^* можно получить с помощью приведенного выше алгоритма.

Выводы

1. При условии равенства выборочных дисперсий S_i и коэффициентов потерь C_i целевая функция $\rho(n_1, n_2)$ будет симметричной относительно координатных осей On_1 и On_2, поэтому оптимальный объем выборки n_1^* при первой серии испытаний будет равен оптимальному объему n_2^* при второй серии испытаний.

2. Изменения выборочной дисперсии S_i относительно S_2 или коэффициента C_i относительно C_2 в 4 раза при прочих равных условиях вызывают изменение соотношения между оптимальными объемами выборок n_1^* и n_2^* не более чем на 15% – 20%.

3. Увеличение коэффициента потерь C_i в 4 раза вызывает уменьшение значения оптимальной величины объема n_i^* примерно на 10%.

4. Уменьшение выборочной дисперсии S_i в 4 раза вызывает увеличение оптимального объема n_i^* не более чем на 20%.

Литература

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Левин Б.Р. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. Де Гроот М. Оптимальные статические решения / Де Гроот М. ; пер. с англ. – М. : Мир, 1974. – 491 с.
3. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии / Зельнер А. – М. : Статистика, I960 . – 440 с.
4. Справочник по вероятностным расчетам / Т.Т. Абезгаус, А.П. Тронь и др. – М. : Воениздат, 1989. – 656 с.

5. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1975. – 670с.
6. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М. : Наука, 1981. – 718 с.

Literatura

1. Levin B.R. Teoreticheskie osnovy statisticheskoj radiotehniki. M.: Radio i svjaz'. 1989. 656 s.
2. De Groot M. Optimal'nye staticheskie reshenija. M.: Mir. 1974. 491 s.
3. Zel'ner A. Bajesovskie metody v jekonometrii. M.: Statistika. I960. 440 s.
4. Abezgaus T.T. Spravochnik po verojatnostnym raschetam. M.: Voenizdat. 1989. 656 s.
5. Prudnikov A.P. Integraly i rjady. M.: Nauka. 1975. 670 s.
6. Bronshtejn I.N. Spravochnik po matematike. M. Nauka. 1981. 718 s.

Al-Ammouri Ali, Al-Ammouri Hasan

Technics for Evaluation of the Optimum Size of Statistical Tests by Bayesian Methods

One of the major test requirements for study of equipment that increases their efficiency is to reduce the number of tests at a given accuracy of statistical information. Based on the Bayesian method, which takes into account a priori data of statistical studies, the algorithm for estimates of the results for statistical tests has been made. This algorithm provides the required accuracy with less number of tests.

The method for evaluation of values for optimal testing, which takes into account the influence of several factors that reduce the number of required tests, has been obtained by minimization of Bayesian risk, characterized by the change in the variances of random parameters of under study equipment during the testing process. Suggested results of studies will improve the effectiveness of statistical tests of the equipment.

As a result of research, it was developed an algorithm for evaluation of key parameters for the testing equipment according to the statistics based on the Bayesian method, that significantly reduces the required number of tests at a given accuracy of statistical information.

The mathematical relationship, which defines the correlation of random values of the mathematical expectation and measures of the accuracy of posteriori distribution of statistical data for the normal law, has been obtained.

The method of evaluation for optimal tests was developed. It is based on the minimization of Bayesian risk under quadratic loss function, which characterizes the deviation of the random values for the investigated parameter from its average value. The suggested method allows taking into account the influence of several important factors on the optimal size of tests carried out in two batches.

Статья поступила в редакцию 19.12.2011.